

# Analyse expérimentale et numérique d'une semelle en élastomère

J. Benkahla<sup>a</sup>, J. Issartel<sup>b</sup> et T.N. Baranger<sup>a</sup>

a. *Laboratoire de Mécanique des Contacts et des structures,  
LaMCoS UMR5259, 18/20 rue des sciences, 69100 Villeurbanne*

b. *CTC, 4 rue Hermann Frenkel, 69007 Lyon*

## Résumé :

Pour l'industrie de la chaussure, le dimensionnement d'une semelle constituée d'élastomère, nécessite l'identification de toutes les propriétés mécaniques de ces matériaux. Les lois de comportement mises en œuvre impliquent une expérimentation particulière pour l'identification des paramètres hyper-viscoélastiques dans le cadre de grandes déformations. Les paramètres ainsi identifiés sont utilisés pour l'analyse de la flexion quasi-statique et dynamique de deux semelles. Les résultats sont comparés des mesures obtenues par un système d'imagerie stéréoscopique.

## Abstract :

For shoe industry, elastomeric outsole conception need to characterize all mechanical properties of this kind of material. Behaviour laws used involve a particular experimentation for hyper-viscoelastic parameters in large strain application. Then, identified parameters are used to simulate quasi-static and dynamic bending of two different soles. Numerical results are compared with measurement obtained by stereoscopic vision system.

**Mots clefs :** elastomères ; semelle ; hyper-viscoélasticité

## 1 Introduction

L'objectif de ce travail est de présenter l'étude complète de deux semelles en élastomère : l'une en caoutchouc NBR (Nitrile Butadiene Rubber) et l'autre en polyuréthane expansé de forme géométrique assez simple. Les résultats numériques ainsi obtenus sont comparés à ceux issus de l'expérimentation. Compte tenu des matériaux constituant les semelles, il est nécessaire de prendre en compte le caractère compressible pour le polyuréthane et incompressible concernant le caoutchouc. Le modèle de comportement mis en œuvre est celui d'un matériau hyper-viscoélastique. La loi de comportement retenue pour l'identification des paramètres hyperélastiques est celle de Signorini (Mooney-Rivlin Généralisé d'ordre 2) et le modèle rhéologique permettant de représenter la viscoélasticité est celui de Maxwell généralisé. Nous utilisons dans le cadre de la caractérisation un programme expérimental composé de tests uniaxiaux (traction et compression) cycliques couplés à un système de corrélation d'image pour identifier la compressibilité du matériau en question. Les caractéristiques matériau identifiées sont alors transposées dans le logiciel de calcul par éléments finis CODE-ASTER pour simuler la flexion des semelles conformément à un test normalisé plus connu sous le nom de Bennewart.

## 2 Identification du comportement des matériaux

Les lois de comportement mises en œuvre pour le caoutchouc NBR et le polyuréthane expansé doivent prendre en compte les deux principaux phénomènes que sont l'hyperélasticité et la viscoélasticité. En ce qui concerne la partie hyperélastique les matériaux sont supposés isotropes mais nous les distinguons par leur compressibilité.

Soit le tenseur gradient de transformation  $F$  donné, dans le cas d'un chargement uniaxial, par :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  représentant les élongations principales et en tenant compte de l'isotropie du matériau on a  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Dans le cas d'un matériau incompressible (caoutchouc) on a  $\det(F) = 1$ , donc :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dans le cas compressible  $\det(F) \neq 1$  et :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

La compressibilité du polyuréthane implique une expérimentation particulière pour l'identification des paramètres hyperélastiques décrite ci-après.

## 2.1 Hyperélasticité

Un matériaux est dit hyperélastique s'il existe un potentiel élastique  $W$  qui est une fonction scalaire du tenseur de déformation, ces dérivées par rapport aux composantes du tenseurs de déformations donnent les composantes du tenseur des contraintes. La fonction  $W$  s'appelle densité d'énergie du matériau. Dans cette étude, on utilise une fonction de Signorini composée d'une partie volumique et d'une partie isochore :

$$W(I_1, I_2) = W_{vol} + W_{iso} \quad (4)$$

$$\begin{cases} W_{vol} = \frac{1}{2}K.(J - 1)^2 \\ W_{iso} = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}} I_1 \\ \bar{I}_2 = J^{-\frac{4}{3}} I_2 \end{cases} \quad (5)$$

$I_1, I_2$  étant les invariants du tenseur Cauchy Green droit  $C$ ,  $J$  est la variation de volume et  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, K$  sont les paramètres matériaux. La relation de comportement est donnée par l'expression du tenseur des contraintes Piola Kirschoff du second ordre.  $S$  :

$$S = S_{iso} + S_{vol} = 2 \frac{\partial W}{\partial C} \quad (6)$$

## 2.2 Hyper-viscoélasticité

La viscoélasticité concerne la totalité des matériaux élastomériques. Cette propriété est observable en phase de décharge lors d'un essai cyclique ou plus simplement au cours d'une relaxation. La loi de comportement adoptée pour représenter le couplage hyper-viscoélastique est proposée par Holzapfel qui adapte le modèle rhéologique de Maxwell généralisé aux grandes déformations. Le potentiel hyperviscoélastique  $W^{hv}$  est donné dans le cas général par :

$$W^v = W_{vol}(J) + W_{iso}^\infty(\bar{C}) + \Upsilon(\bar{C}, \Gamma_\alpha) \quad (7)$$

avec  $\bar{C} = J^{-\frac{2}{3}}C$ .  $C$  étant le tenseur Cauchy Green droit,  $W_{iso}^\infty(\bar{C})$  le potentiel isochore à l'équilibre et  $\Upsilon(\bar{C}, \Gamma_\alpha)$  la contribution viscoélastique qui est fonction des variables internes  $\Gamma_\alpha$ . La viscoélasticité intervient au niveau du terme isochore. Dans ce cas le tenseur des contraintes s'écrit :

$$S = S_{vol} + S_{iso}^v \text{ où } S_{iso}^v = S_{iso}^\infty + \sum_{\alpha=1}^m Q_\alpha \quad (8)$$

avec  $S_{iso}^v$ , la contrainte hyper-viscoélastique,  $Q_\alpha$  la contribution dépendant du temps et  $S_{iso}^\infty$  la partie isochore purement hyperélastique. Le modèle de Maxwell généralisé nous fournit dans le cas de grandes déformations l'équation différentielle :

$$\dot{Q}_\alpha + \frac{Q_\alpha}{\tau_\alpha} = \beta_\alpha \dot{S}_{iso}^\infty \quad (9)$$

Une solution de l'équation (9) est obtenue par le biais d'une discrétisation temporelle sur un intervalle donné  $[0; T]$  avec un pas de temps  $\Delta t$  où  $Q_\alpha$  à l'instant  $n+1$  dépend de  $Q_\alpha$  à l'instant précédent  $n$ , de la contrainte isochore à l'équilibre  $S_{iso}^\infty$  à l'instant  $n+1$  et à l'instant  $n$ . On constate par conséquent que seule la partie viscoélastique prend en compte l'histoire du chargement.

$$Q_{\alpha, n+1} = Q_{\alpha, n} \cdot e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}} + \beta_\alpha (S_{iso, n+1}^\infty - S_{iso, n}^\infty) \cdot e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_\alpha}} \quad (10)$$

$\beta_\alpha$  et  $\tau_\alpha$  étant les paramètres matériaux identifiés. Cette loi de comportement a été implémentée dans le code éléments finis CODE-ASTER.

## 2.3 Programme expérimental

Un programme expérimental est mis en œuvre pour identifier les paramètres matériaux. Il comporte trois essais uniaxiaux.

**Essai de traction :** La contrainte ne peut être exprimée en fonction d'une seule élongation dans le cas d'un essai de traction uniaxiale car la relation entre les élongations principales dépend de la loi de comportement. Ainsi avec un simple dynamomètre il nous est impossible d'obtenir la contrainte en fonction des 2 élongations principales ( $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ). L'expérience conduisant la caractérisation du comportement hyperélastique se compose d'un dynamomètre puis d'une caméra nous permettant via le logiciel de corrélation d'image 7D de mesurer les déformations dans les deux directions principales :

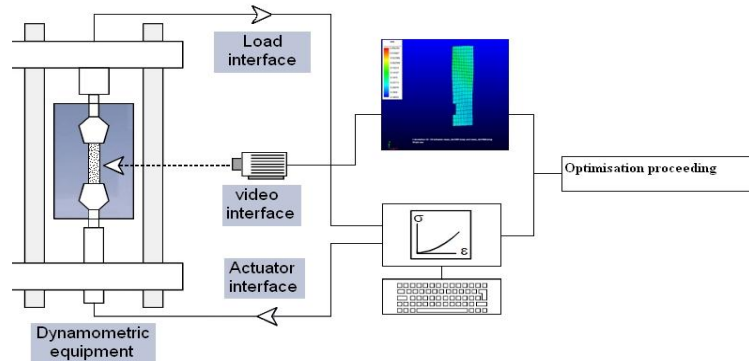


FIG. 1: test de traction couplé à un système de corrélation d'image

**Essai de compression :** Par analogie avec le test précédent, la caractérisation hyperélastique d'un matériau compressible dans le cadre d'une compression se réalise par un montage composé d'une machine dynamométrique permettant de relever les contraintes en compression puis d'un comparateur digital ( $1\ \mu\text{m}$  de précision) mesurant la dilatation de l'échantillon soit la déformation transversale.

**Test de relaxation :** Le test permettant d'isoler les propriétés viscoélastiques de nos matériaux est la relaxation qui consiste maintenir une certaine déformation constante pendant intervalle de temps suffisamment large (30 minutes).

La figure (2) représente les résultats en traction, compression et relaxation.

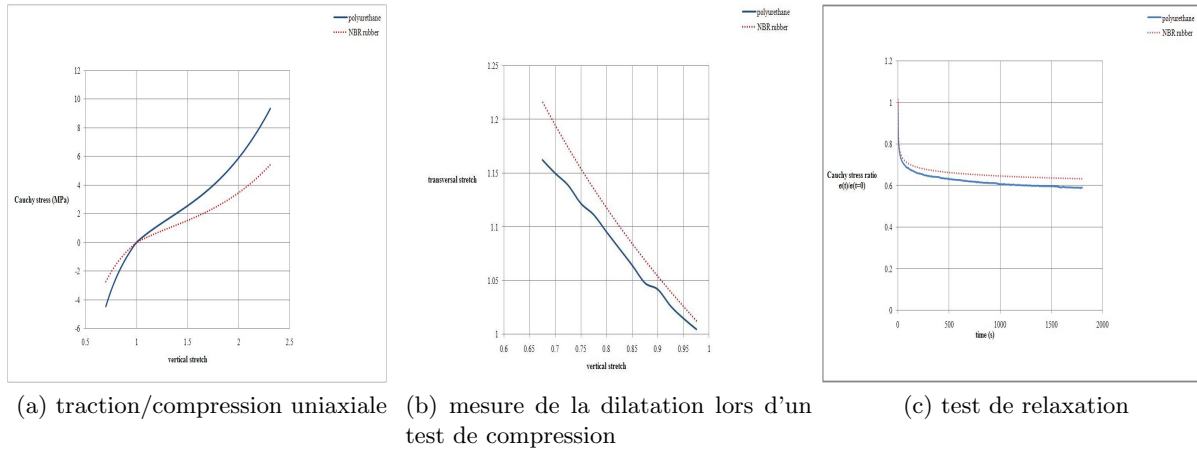


FIG. 2: résultats expérimentaux

Les tests de traction et compression sont effectués à une vitesse très faible pour isoler la partie purement hyperélastique. La viscoélasticité est prise en compte ensuite en augmentant la vitesse de chargement. L'identification des paramètres matériau est réalisé par la minimisation d'une fonctionnelle de type moindre carré en utilisant le solveur EXCEL.

	Hyperélasticité			
	$C_{01}$ (Mpa)	$C_{10}$ (Mpa)	$C_{20}$ (Mpa)	$K$ ( $\times 10^6$ )
Caoutchouc NBR	0.01247	0	0.008057	1.247
Polyuréthane	0.0638	0	0.0435	0.22

TAB. 1: paramètres hyperélastiques identifiés

	Viscoélasticité									
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$
Caoutchouc NBR	1.11	19.86	-69.5	93.9	-42.3	0.2	2	20	200	2000
Polyuréthane	0.134	21.3	-46.2	92.6	-37.1	0.2	2	20	200	2000

TAB. 2: paramètres viscoélastiques identifiés

Les tableaux (1) et (2) présentent les paramètres identifiés sur le caoutchouc et le polyuréthane lors des essais précédemment décrits.

### 3 Application numérique

L'application ciblée dans cette étude consiste modéliser la flexion de deux semelles, l'une en polyuréthane de forme géométrique très simple permettant de valider notre modèle de comportement et

l'autre en caoutchouc avec une géométrie plus réaliste présentant ainsi l'enjeu industriel associé à ces travaux.

### 3.1 Flexion d'une semelle en polyuréthane

La géométrie modélisée pour simuler la flexion est de forme parallélépipédique d'une épaisseur de 8 mm et de longueur 170 mm et de largeur 60 mm. Les résultats issus de la simulation sont comparés des mesures de champs de déformation obtenues par un système de corrélation d'image utilisant deux caméras dans le cas d'un champs tridimensionnel. Il s'agit d'une reproduction utilisant le principe de la stéréoscopie.

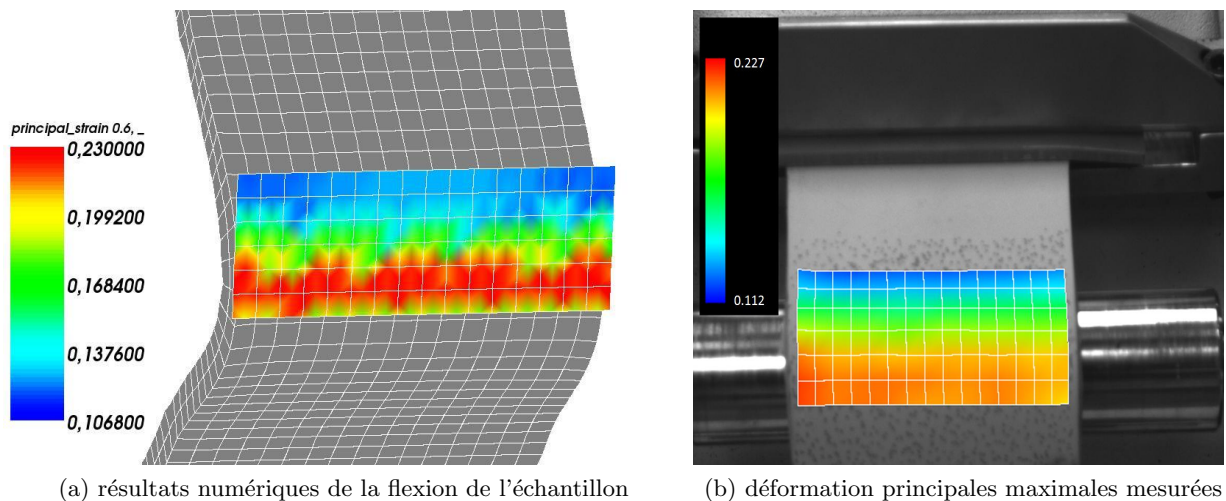


FIG. 3: comparaison des résultats numériques et expérimentaux (déformations principales)

La figure (3) nous présente les résultats numériques obtenus par le logiciel CODE-ASTER (3a) et les résultats expérimentaux (3b). D'un point de vue qualitatif, on retrouve une distribution des déformations principales maximales calculées qui correspond de manière assez précise aux mesures effectuées sur le banc d'essai. D'un point de vue quantitatif on constate que les extrêmes sont assez proches : La simulation numérique donne un maximum de déformation de 0.23 pour 0.227 obtenu par la mesure. Le minimum obtenu par notre modélisation est de 0.1068 alors que l'on obtient une valeur de 0.112 par l'expérimentation. Soit une erreur de 2.6 %.

### 3.2 Flexion d'une semelle réelle en caoutchouc

La géométrie réelle de la semelle en question est réalisée à partir d'une maquette en utilisant un bras articulé muni d'un scanner. Conformément au test normalisé, l'axe de flexion doit présenter une certaine inclinaison et l'angle de rotation imposé est de 37 degrés de part et d'autre de l'axe de flexion. La fréquence de sollicitation imposée par la norme du test Bennewart est de 2.5 Hz. L'application industrielle présentée dans la figure (4) permet de visualiser les zones de fortes déformations lors de la flexion. Cette zone correspond à la région de l'axe de flexion non protégée par les crampons. On obtient plus globalement une première approche concernant l'influence de la géométrie (orientation des crampons, épaisseur de la structure) sur la résistance de la semelle au cours de la marche.

## 4 Conclusion

Cette étude présente l'identification du comportement hyper-viscoélastique d'un matériau caoutchouteux (incompressible) et d'un polyuréthane expansé compressible. Un programme expérimental composé de tests uniaxiaux couplés à un système de traitement d'image a permis la prise en compte de la compressibilité. L'ensemble des paramètres déterminés ainsi que la loi de comportement sont transposés dans le code éléments finis CODE-ASTER pour simuler un test normalisé de flexion dit le

Bennewart. L'application industrielle visant la réalisation d'un outil d'aide à la conception est présentée par la simulation d'une semelle réelle en localisant les zones présentant des fortes déformations. La validation d'une telle modélisation a nécessité la mise en place d'un système stéréoscopique permettant de mesurer le champs de déformations dans le cadre tridimensionnel. Nos prochains travaux porteront sur l'endommagement par fatigue du matériau pour ainsi finaliser la représentation numérique du test Bennewart dont l'objectif est la mesure de la dure de vie d'une semelle de chaussure.

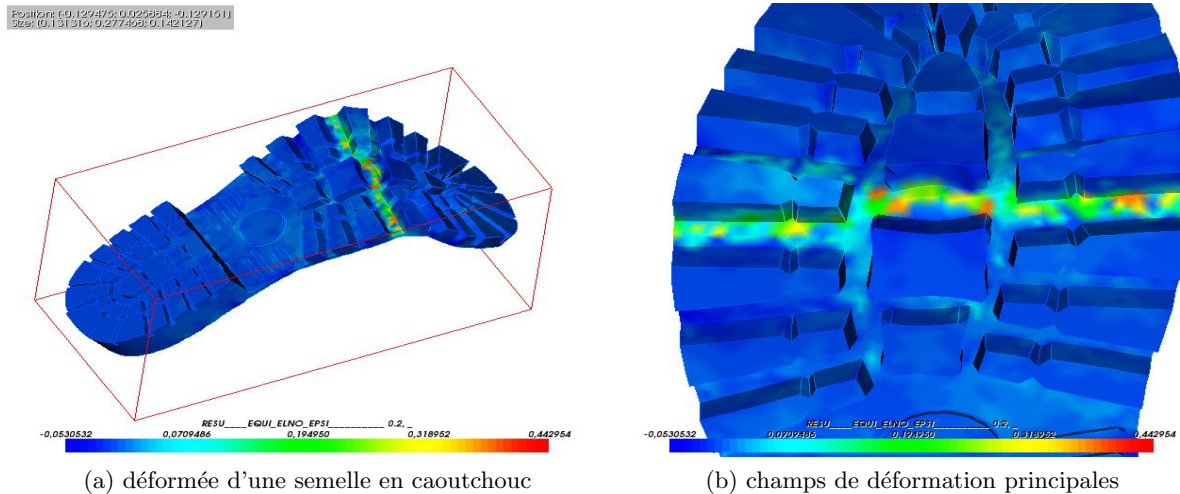


FIG. 4: simulation de la flexion d'une semelle en caoutchouc

## Références

- [1] Robisson, A., “Comportement mécanique d'un élastomère chargé en silice. Étude de l'influence des charges et modélisation par une loi hyperviscoélastique endommageable”. PhD thesis, École des Mines de Paris (2000).
- [2] Holzapfel, G. A., *Nonlinear solid mechanics*, 2001, Wiley.
- [3] Kalliske M., Nasdala L., Rothert H., *On damage modelling for elastic and viscoelastic materials at large strain*, Computers and Structures 79 (2001) 2133-2141.
- [4] Miehe C., Gktepe S., Lulei F., *A micro-macro approach to rubber-like materials, Part I : the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 52 (2004) 2617-2660.
- [5] Cantournet S., Desmorat R., *Modélisation thermodynamique du frottement interne et de l'hystérésis d'un élastomère*, Comptes-Rendus Mécanique. vol 331. (2003) pp 265-270.
- [6] Gacem H., Chevalier Y., Dion J-L, Soula M., Rezgui B., *Long term prediction of nonlinear viscoelastic creep behaviour of elastomers : extended Schapery model*, Mécanique & Industries 9, 407-416 (2008)
- [7] Yang L.M., Shim V.P.W., Lim C.T., *A visco-hyperelastic approach to modelling the constitutive behaviour of rubber*, International Journal of Impact Engineering 24 (2000) 545-560.
- [8] Pea E. , Calvo B., Martinez M.A., Doblar M., *An anisotropic visco-hyperelastic model for ligaments at finite strains. Formulation and computational aspects*, International Journal of Solids and Structures 44 (2007) 760-778.
- [9] Simo, J., *On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computational aspects*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 60 (1987), 153-173.
- [10] Bouchart V., Brieu M., Kondo D., Abdelaziz M.N., *Macroscopic behavior of a reinforced elastomer : micromechanical modelling and validation*, Mécanique & Industries 8, 199-205 (2007).